

(9) Parameterdarstellung von Kurven

a) Kreise und Ellipsen

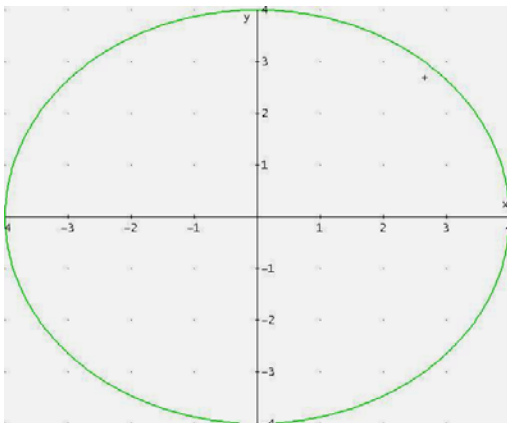
Wie bei der Parameterdarstellung von Geraden (in der Vektorrechnung) wird auch hier der x-Anteil und der y-Anteil der Kurvenpunkte getrennt angeschrieben.

Sei ein Kreis in Hauptlage gegeben durch $x^2 + y^2 = 16$, so lautet seine Parameterdarstellung:

$$x = 4 \cos(t)$$

$$y = 4 \sin(t) \quad t \in \mathbb{R} \text{ im Bogenmaß}$$

In Derive schreibt man dies so an: $[4 \cdot \text{COS}(t), 4 \cdot \text{SIN}(t)]$. Achte darauf, dass COS und SIN groß geschrieben sind! Zeichnet man den Kreis im Grafikfenster, so wird man noch über die max- und min-Werte des Parameters t gefragt. Hier trägt man 0 bzw. $2 \cdot \text{PI}$ ein (oder $-\text{PI}$ bzw. PI) ein. Die Zahl 3,14... wird dann automatisch eingefügt und man erhält ein Kreisbild.



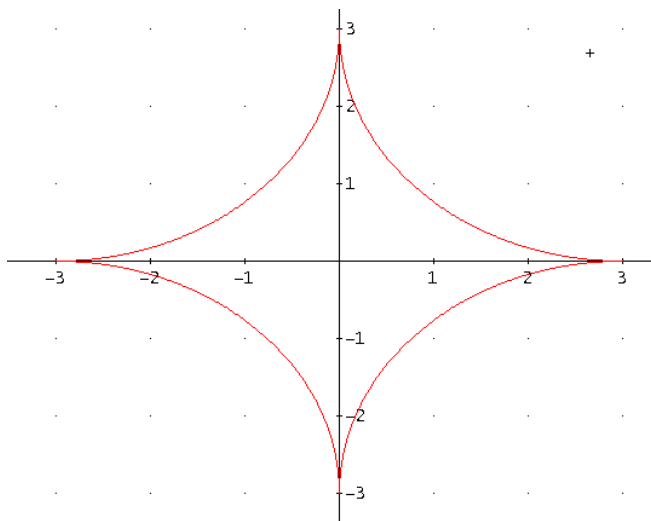
Überlege nun welche Parameterbelegungen für t gemacht werden müssen, damit ein Halbkreis oder ein Viertelkreis entsteht.

Wie kann das linke obere Viertel eines Kreises dargestellt werden?

Wie schaut die Parameterdarstellung eines Kreises aus, der nicht in Hauptlage liegt?

Beispiel:

Die untenstehende Figur ist mit Derive zu berechnen und zu zeichnen.



$$\#1: [3 \cdot \text{COS}(t), 3 \cdot \text{SIN}(t)]$$

$$\#2: [3 \cdot \text{COS}(t) + 3, 3 \cdot \text{SIN}(t) + 3]$$

$$t \in [\text{PI}, 3 \cdot \text{PI}/2]$$

$$\#3: [3 \cdot \text{COS}(t) - 3, 3 \cdot \text{SIN}(t) + 3]$$

$$t \in [3 \cdot \text{PI}/2, 2 \cdot \text{PI}]$$

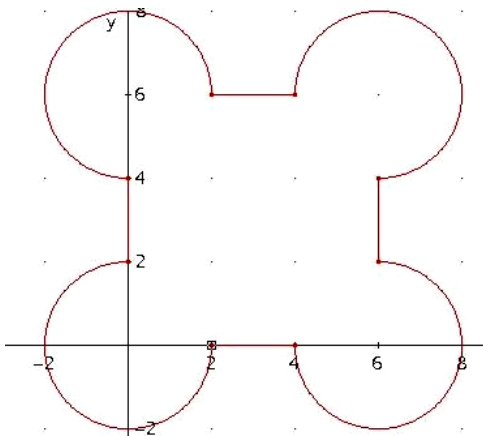
$$\#4: [3 \cdot \text{COS}(t) - 3, 3 \cdot \text{SIN}(t) - 3]$$

$$t \in [0, \text{PI}/2]$$

$$\#5: [3 \cdot \text{COS}(t) + 3, 3 \cdot \text{SIN}(t) - 3]$$

$$t \in [\text{PI}/2, \text{PI}]$$

Beispiel:

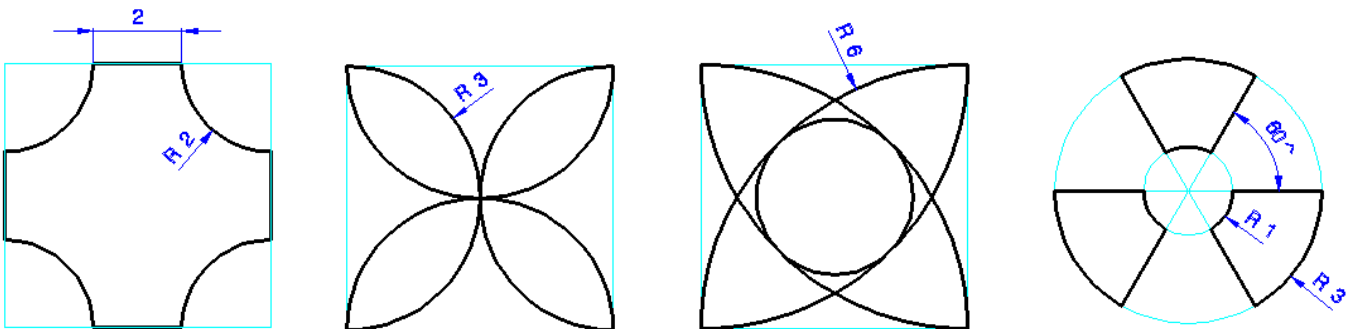


Wir zeichnen zuerst die einzelnen Streckenstücke $[[0,2],[0,4]]$ und danach die Kreisbögen.

Der rechte untere Kreisbogen sieht folgendermaßen aus:
 $[2*\text{COS}(t)+6, 2*\text{SIN}(t)]$
 $t \in [\pi, \pi/2]$

ÜBUNGEN:

Stelle die schwarz dargestellten Figuren mit Derive dar. Die Wahl des Koordinatenursprungs ist beliebig.



Für **Ellipsen** gilt Analoges:

Eine Ellipse in 1. Hauptlage mit $a=5$ und $b=3$ besitzt folgende Parameterdarstellung:

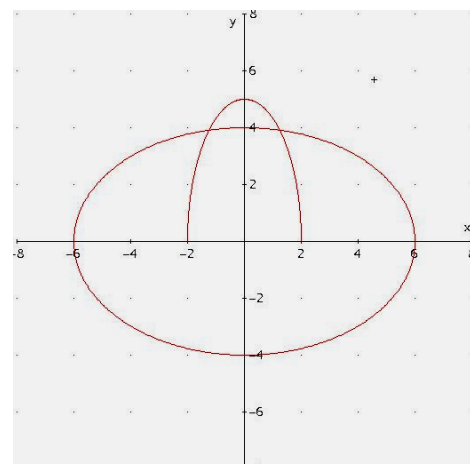
$$\begin{aligned} x &= 5*\text{COS}(t) \\ y &= 3*\text{SIN}(t) \quad t \in P \end{aligned}$$

Das Bild daneben zeigt eine Ellipse in 1. Hauptlage:

$$\begin{aligned} x &= 6*\text{COS}(t) \\ y &= 4*\text{SIN}(t) \end{aligned}$$

und eine Halbellipse in 2. Hauptlage:

$$\begin{aligned} x &= 2*\text{COS}(t) \\ y &= 5*\text{SIN}(t) \end{aligned}$$



b) Freiformkurven (Bezierkurven)

Ausgehend von einem Kontrollpolygon $B_{00}, B_{01}, B_{02}, \dots$ (Punkte der 0.ten Teilung) werden die Bezier-Punkte $B_{10}, B_{11}, B_{12}, \dots$ (Punkte der 1. Teilung) nach dem Algorithmus von De Casteljau ermittelt. Danach die Punkte B_{20}, B_{21}, \dots (Punkte der 2. Teilung) usw.

Wir geben ein Kontrollpolygon der Ordnung 2, also 3 Bezierpunkte vor und berechnen den Punkt B_{20} . Danach stellen wir eine Tabelle für verschieden Parameterwerte auf und lassen die Bezierkurve – die hier eine Parabel ist - zeichnen.

Die einzige Formel, die man sich dabei merken muss, ist die des Algorithmus von De Casteljau:

$$B_{10} = B_{00} \cdot (1-t) + B_{01} \cdot t$$

wobei A und B Bezierpunkte und T ein Bezierpunkt der nächsten Teilung ist.

Beispiel für Bezierkurve 2. Ordnung:

Bezierkurve durch das Kontrollpolygon $B_{00}(0/0)$, $B_{01}(2/5)$, $B_{02}(1/6)$

Wir stellen die Eingabe zunächst auf "Wort" wegen der Indizes der Bezierpunkte, definieren die Koordinaten und lassen die Punkte zeichnen (auf *Punkte/verbinden* im Menü *Ansicht* klicken)

$$B_{00} := [0,0]$$

$$B_{01} := [2,5]$$

$$B_{02} := [6,1]$$

Wir definieren den 1. Teilungspunkt B_{10} zwischen B_{00} und B_{01} :

$$B_{10} := B_{00} \cdot (1-t) + B_{01} \cdot t$$

und analog den 1. Teilungspunkt B_{11} zwischen B_{01} und B_{02} :

$$B_{11} := B_{01} \cdot (1-t) + B_{02} \cdot t$$

Wir können die Ausdrücke B_{10} und B_{11} vereinfachen und nach t ausmultiplizieren.

$$\text{Wir erhalten } B_{10} := [2 \cdot t, 5 \cdot t] \text{ und } B_{11} := [4 \cdot t + 2, 5 - 4 \cdot t]$$

Dann lassen wir auch diese Strecke (z.B. für $t=0.3$ substituieren) zeichnen.

Für $B_{20} := B_{10} \cdot (1-t) + B_{11} \cdot t$ erhalten wir nach ausmultiplizieren

$$B_{20} := [2t^2 + 4t, 10t - 9t^2]$$

und nach

Substitution für $t=0.3$ den Punkt B_{20}

der Bezierkurve auf der

Verbindungsgeraden $[B_{10}, B_{11}]$.

Da jetzt B_{20} als Zahlenwert definiert ist,

müssen wir, wenn wir mehrere Punkte

zeichnen wollen – mit Hilfe des

Vektorbefehls – B_{20} nochmals als

Variablenausdruck in t definieren. Am

einfachsten markieren wir den Ausdruck

in t , kopieren ihn mit F3 in die

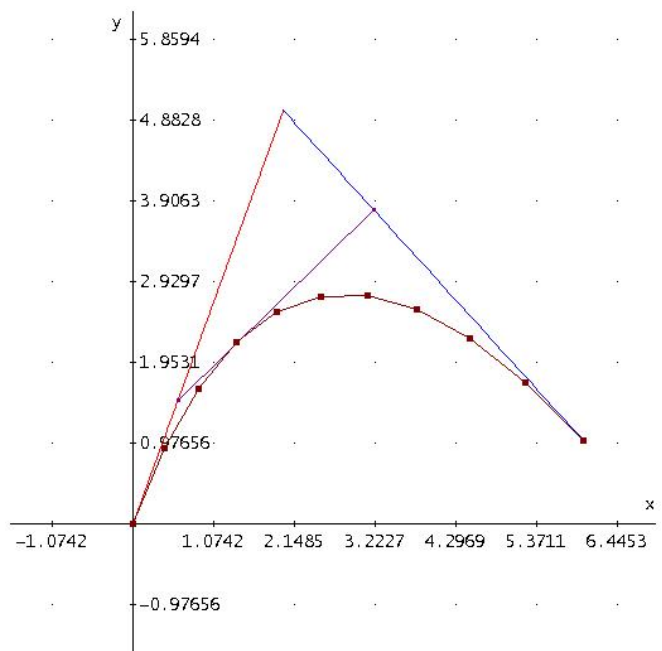
Eingabezeile und mit der Entertaste

haben wir B_{20} wieder neu definiert. Wir

wollen 10 Punkte der Bezierkurve

angeben und miteinander verbinden.

$$\text{VECTOR}(B_{20}, t, 0, 1, 0, 1)$$



Beispiel für Bezierkurve 3. Ordnung:

Gegeben ist das Kontrollpolygon $B_{00}(-6/0)$, $B_{01}(0,6)$, $B_{02}(0,-3)$, $B_{03}(6,0)$

Wir definieren zunächst die Punkte

$$B_{00} := [-6, 0], B_{01} := \dots$$

Danach berechnen wir die Punkte der 1.

$$\text{Teilung } B_{10} := B_{00} \cdot (1-t) + B_{01} \cdot t,$$

$$B_{11} := \dots \text{ und vereinfachen die}$$

Parameterdarstellung. Analog definieren

wir die Punkte der 2. Teilung

$$B_{20} := B_{10} \cdot (1-t) + B_{11} \cdot t, B_{21} := \dots \text{ und auch}$$

$$\text{der 3. Teilung } B_{30} := B_{20} \cdot (1-t) + B_{21} \cdot t$$

Wir lassen die Kontrollpunkte zeichnen

$[B_{00}, \dots, B_{03}]$. Achte auf die

Einstellungen/Punkte/Verbinden.

Danach lassen wir die Punkte B_{30}

zeichnen, wobei die Parameterwerte t

jeweils um 0.05 ansteigen sollen.

$\text{VECTOR}(B_{30}, t, 0, 1, 0.01)$

Danach wollen wir noch explizit für den

Parameterwert $t=2/3$ die

entsprechenden De Boor Punkte mit ihren Verbindungsgeraden einzeichnen. Wir

substituieren in den entsprechenden Zeilen für t und zeichnen die

Verbindungsgeraden mit $[B_{10}, B_{11}]$, $[B_{11}, B_{12}]$, und beschriften auch die Punkte.

Wir erhalten für:

$$B_{10} = [-2, 4]$$

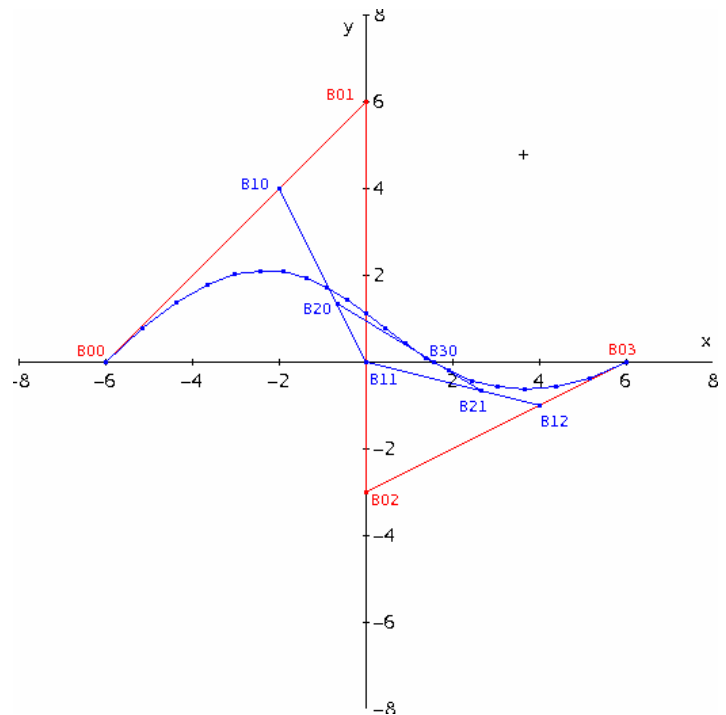
$$B_{11} = [0, 0]$$

$$B_{12} = [4, -1]$$

$$B_{20} = [-0.66, 1.33]$$

$$B_{21} = [2.66, -0.66]$$

$$B_{30} = [1.55, 0]$$

**ÜBUNGEN:**

Berechne in den folgenden Beispielen die Bezierkurve für Parameterwerte, die sich jeweils um 0.1 unterscheiden. Zeichne speziell für den gegebenen Parameterwert explizit die Verbindungsgeraden und den Kurvenpunkt ein.

- $B_{00}(0/-9)$, $B_{01}(-3/6)$, $B_{02}(3/-6)$ speziell $t=1/3$
- $B_{00}(6/6)$, $B_{01}(2/-2)$, $B_{02}(6/-10)$, $B_{03}(-6/2)$ speziell für $t=0,5$
- $B_{00}(-12/6)$, $B_{01}(0,3)$, $B_{02}(-6/-9)$, $B_{03}(-12/-3)$ speziell für $t=2/3$