

(6) Vektorrechnung

In Derive ist ein Vektor eine geordnete Liste von Elementen, die innerhalb von eckigen Klammern stehen. Z.B.: $[2, -3]$ ist ein zweidimensionaler Vektor in Derive. Derive stellt aber Vektoren nicht als "Pfeile" dar, sondern als Punkte – Wir haben das ja schon bei den Funktionen gesehen.

Alle Rechenoperationen mit Vektoren funktionieren so, wie wir es gewohnt sind.

Vektoraddition	$[a, b] + [c, d] = [a + b, c + d]$
Multiplikation eines Vektors mit einer natürlichen Zahl	$c[a, b] = [c \cdot a, c \cdot b]$
Skalarprodukt zweier Vektoren	$[a, b] \cdot [c, d] = a \cdot c + b \cdot d$
Vektorielle Produkt zweier Vektoren	$CROSS([a, b, c], [d, e, f]) = [bf - ec, -af - cd, ae + bd]$

Einzelne Punkte werden in Vektorschreibweise dargestellt. Will man mehrere Punkte zugleich darstellen, so schreibt man diese nochmals in eckige Klammern. Also $[[1, 2], [3, -5], [-3, 0]]$ stellt die drei Punkte mit kleinen Quadraten im Grafikfenster dar. Will man die Punkte durch einen Streckenzug miteinander verbinden, so geschieht das im Grafikfenster über das Menü *Extras/Anzeige* und im Registerreiter Punkte wählt man *Verbinden/Ja* aus.

2 Beispiele:

a) Gegeben sind die Punkte $A(2/3)$, $C(3/-1)$, $D(5/1)$ eines Parallelogramms. Berechne den 4. Eckpunkt B und kontrolliere durch eine Zeichnung

Zuerst stellen wir in *Extras/Einstellungen/Eingabe* die Variablen auf *Wort* und auf *Großschreibung unterscheiden*.

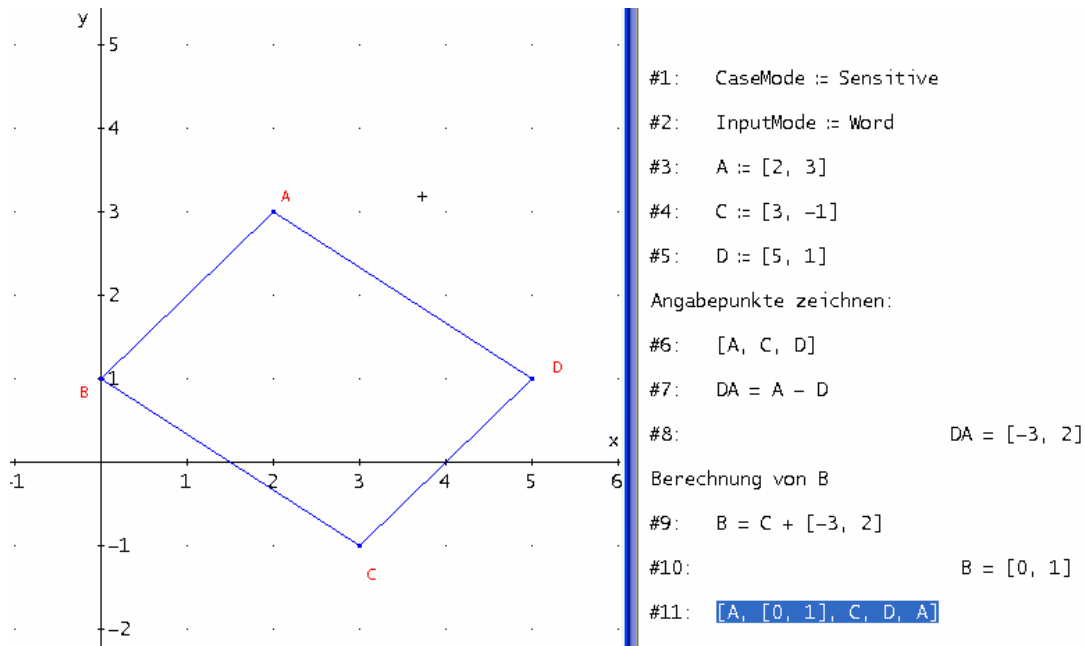
Nun definieren wir die Angabepunkte als Vektoren über *Schreibe/Variablenwert*


D.h. wir schreiben in die 1. Zeile A in die 2. Zeile $[2, 3]$ usw...

Zu Beginn zeichnen wir die Angabepunkte mit $[A, B, C]$ und beschriften sie im Grafikfenster (*Einfügen/Annotation*), dies dient als gute Skizze. Dann berechnen wir den "Richtungsvektor"

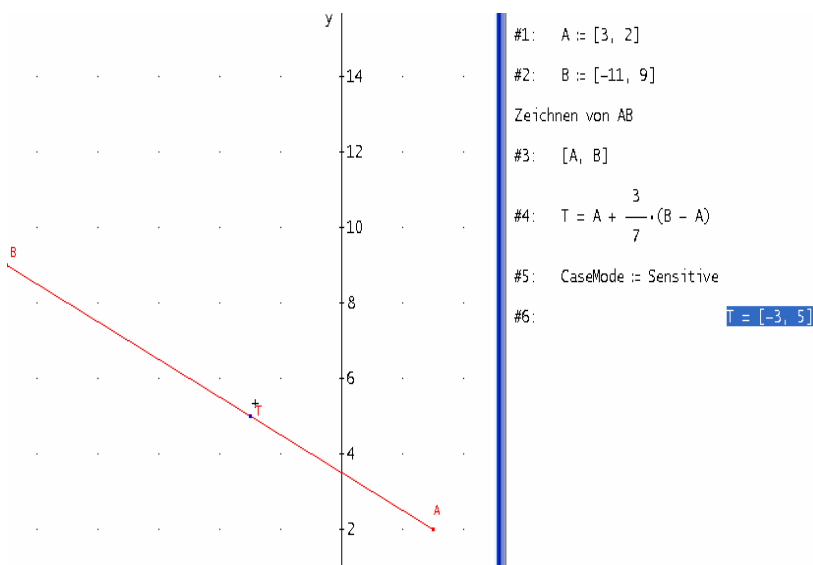
\overrightarrow{DA} durch die "Spitze minus Schaft-Regel" $DA = A - D$ und anschließendem *Vereinfachen*. Wir erhalten $DA = [-3, 2]$. Wir hängen jetzt diesen Vektor an den Punkt C an. Entweder definieren wir DA als Variablenwert oder wir addieren zu C den Vektor $[-3, 2]$. Die zweite Variante ist schneller, weil wir den Vektor \overrightarrow{DA} ja nicht mehr brauchen.

Also geben wir $B = C + [-3, 2]$ in die Authorenzeile ein. Nach dem Vereinfachen erhalten wir $B = [0, 1]$. Wir kontrollieren das Ergebnis durch eine Zeichnung. Wir können die zuvor gezeichneten Punkte durch Rechtsklick in das Grafikfenster löschen. Wir stellen wieder durch Rechtsklick ins Grafikfenster auf *Anzeige/Punkte/Verbinden* und wechseln ins Algebrafenster. Dort tragen wir die Punkte in der richtigen Reihenfolge ein, nämlich $[A, [0, 1], C, D, A]$ und klicken auf das Zeichensymbol im Grafikfenster.



Sollten manche Teile der Grafik nicht ins Fenster passen, so kann man unter Beibehaltung der Skalierung das Kreuz auf den Mittelpunkt des Fensters ziehen und dann  (Kreuz als Mittelpunkt) wählen.

b) Bestimme den Punkt T, der die Strecke AB im Verhältnis 3:4 teilt. A(3/2), B(-11/9)



Zuerst definieren wir wieder über *Schreibe/Variablenwert* die Punkte A und B. Wir zeichnen die Strecke AB über [A,B] zeichnen und stellen das Grafikenfenster so ein, dass die Strecke vollständig am Bildschirm möglichst groß zu sehen ist. Wir stellen noch auf *Großschreibung unterscheiden in Extras/Einstellungen/Eingabe* und erhalten den Teilungspunkt T durch die Formel $T = A + \frac{3}{7}(B - A)$ - Ergebnis (-3/5). Nur mehr einzeichnen und beschriften – fertig!

Parameterdarstellung von Geraden

"Zerlegt" man, wie vom Unterricht gewohnt, die Parameterdarstellung einer Geraden in ihren x-, bzw. y-Anteil, so bilden diese Anteile in Vektorform von Derive geschrieben, die Parameterdarstellung einer Geraden.

Also: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, entspricht in der Deriveschreibweise: [3-t,-2+5t]

Gibt man dies in der Authorenzeile ein und wechselt ins Grafikfenster und wählt *Zeichnen*, so wird man noch über min. und max. Wert des Parameters gefragt. Überdies kann man auch noch zwischen Linien- und Punktgraph auswählen.

Sehr gut ist auch hier der Schieberegler anzuwenden, weil man hier stückweise die Veränderung des Parameters t nachvollziehen kann.

Achtung: Nach dem Eingeben der Werte für den Parameter kann die Gerade nach einem Löschvorgang nicht mehr gezeichnet werden, denn das Programm speichert den letzten Parameterwert und zeichnet nur den einen Punkt bei einem neuerlichen Zeichnen. Abhilfe schafft das Verwenden eines neuen Parameters.

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte P(5/-1) und Q(1/-2)

- Gib eine Parameterdarstellung der Geraden an, die P und Q verbindet.
- Zeichne die Gerade, beschrifte die Punkte P und Q
- Überprüfe rechnerisch und zeichnerisch, ob der Punkt R(-1/1) auf der Geraden liegt
- Zeichne jenen Punkt A der Geraden ein, dessen Parameterwert t gleich -1 ist.
- Berechne die Länge der Strecke PQ.

Wir definieren wieder die beiden Punkte P und Q, als auch den Richtungsvektor PQ über *Schreiben/Variablenwert*. Danach geben wir als Parameterdarstellung $P+t \cdot PQ$ in die Authorenzeile ein. Anschließendes *Vereinfachen* ergibt

$[5-4t, -1-t]$, was soviel wie $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ bedeutet.

Den Funktionsgraphen erhalten wir wieder über das Grafikfenster und Zeichnen, als Min-, bzw. Maxwert wählen wir [-4, +4]

Um zu prüfen, ob R auf der Geraden liegt, setzen wir die beiden Teilgleichungen gleich der x- bzw. y-Koordinate des Punktes R. Nach Lösen der beiden Gleichungen sehen wir, dass t verschiedene Werte aufweist, also R kein Punkt der Geraden ist. Wir wollen auch R noch einzeichnen mit [-1, 1] in der Authorenzeile.

Der Punkt, der zum Parameterwert $t=-1$ gehört erhalten wir durch Variablensubstitution und zwar A(9/0).

Die Länge der Strecke PQ ist nichts anderes als der Betrag des Vektors PQ. Dafür hat Derive den Befehl ABS zur Verfügung. Wir tippen also ABS(PQ) in die Authorenzeile und nach Vereinfachen erhalten wir $\sqrt{17}$.

ÜBUNG:

Überprüfe, ob die Punkte A,B,C auf einer Geraden liegen und gib die Abstände AB, AC und BC an.

A(3/-1), B(0/4), C(-2/6)

Wir sehen: In diesen Beispielen kommt immer wieder das Erstellen eines Richtungsvektors, einer Parameterdarstellung einer Geraden..... vor. Es ist mühsam, diese Rechenschritte immer wieder einzugeben. Dagegen kennt Derive ein gutes Mittel, nämlich die **Definition von Funktionen**. Gerade hier bei der Vektorrechnung ist diese "Formelsammlung" sehr hilfreich und liefert rasch die gewünschten Ergebnisse.

Wir wollen im folgenden Beispiel eine **Streckensymmetrale** berechnen.

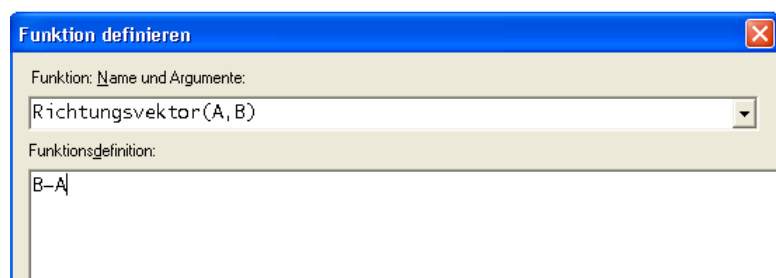
Dazu sollten gewisse Vorüberlegungen getan werden:

- Die Angabe sind 2 verschiedene Punkte
- Man braucht den Richtungsvektor zwischen diesen Punkten
- Man braucht den Mittelpunkt der Strecke
- Man braucht den Normalvektor
- Man braucht die Parameterdarstellung einer Geraden
- Man möchte diese Gerade auch in Normalvektorform ausgeben

Genau diese Schritte (ab Punkt 2) werden wir als Funktionen (Formeln, Makros) definieren.

Wir definieren über
Schreiben/Funktion definieren
die Funktion
Richtungsvektor(A,B):= B-A

In der ersten Zeile wird die Funktion definiert und ihre Parameter (A,B) – das sind die Variablen, die in der Berechnung der Funktion vorkommen – eingegeben. In der zweiten Zeile wird die tatsächliche Berechnung durchgeführt. Durch Bestätigen mit der **OK**-Taste bzw. **ENTER** ist die Funktion definiert.



Dann die Funktion
Mittelpunkt(A,B):=(A+B)/2

Bei der Funktion Normalvektor müssen wir die einzelnen Elemente (die x- und y-Koordinate) auslesen, vertauschen und vor einem der beiden ein negatives Vorzeichen setzen. Für das Auslesen der x-, bzw. y-Koordinate gibt es den Befehl **ELEMENT(<Vektor>, <nummer>)**, wobei Nummer die 1. oder 2. Koordinate des betreffenden Vektors bedeutet.

Normalvektor(A,B):=[Element(B-A,2), -Element(B-A, 1)]

Die Parameterdarstellung einer Geraden lautet:

$$\text{Gerade_param}(A,B) := A + t * \text{Richtungsvektor}(A,B)$$

Die Normalvektorform der Geraden

$$\text{lautet: } \text{Gerade_nvf}(A,B) := [x,y] * \text{Normalvektor}(A,B) = \text{Normalvektor}(A,B) * A$$

Wir speichern diese Datei unter dem Namen *vektoren.mth* und schließen sie.

Beispiel:

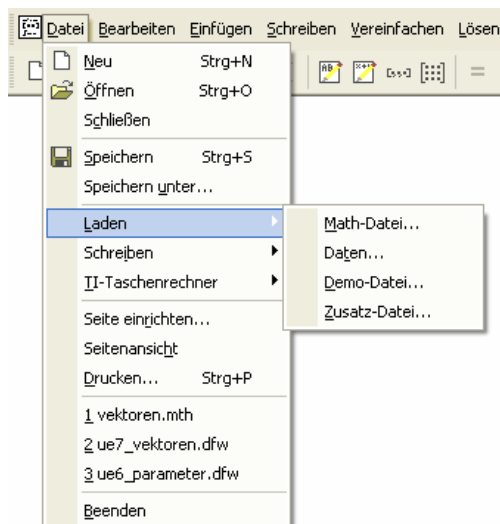
Wir probieren dies jetzt zunächst schrittweise, dann direkt mit den Punkten P(-2/-3) und Q(4/1) aus.

Wir definieren die Punkte P und Q über *Schreiben/Variablenwert*

$$P := [-2, -3]$$

$$Q := [4, 1]$$

oder durch Eintippen von " := "



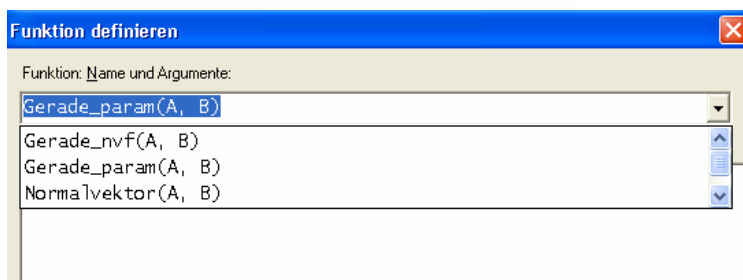
Zum Aufrufen unserer soeben gespeicherten Datei *vektoren.mth* gibt es mehrere Möglichkeiten:

Entweder wir laden die ganze Datei über *Datei/Laden/Math-Datei*, oder wir holen sie als Zusatzdatei, über *Datei/Laden/Zusatz-Datei*

Im ersten Fall werden alle definierten Funktionen sichtbar ins Algebrafenster geladen, im 2. Fall erscheint nur die Meldung

LOAD(C:\Informatik\vektoren.mth)

Die Dateien sind zunächst nicht sichtbar. Öffnen wir aber das Menü *Schreiben/Funktion definieren*, so kann im 1. Fenster durch Anklicken des Pfeils die Liste der definierten Funktionen in dieser Datei angezeigt und ins Fenster geholt werden.



Wir wählen die 2. Variante:

Klicken wir auf *Richtungsvektor(A,B)* und kopieren ihn in die Authorenzeile (STRG+, Strg+v) und ersetzen dort die Punkte A und B durch P und Q so erscheint nach Anwählen von Vereinfachen der Vektor [6,4]. Das selbe Spiel mit Mittelpunkt, *Gerade_param*, *Normalvektor*...

Der Vorteil ist, dass wir nicht explizit die Punkte A und B mit ihren Koordinaten eingeben müssen, sondern durch die Definition der Variablen P und Q sind diese Werte festgelegt worden und durch Austauschen der Punkte werden sie berechnet.

Wir geben die Streckensymmetrale in Normalvektorform aus:

Dazu wird die entsprechende Funktion geladen, wir müssen die Punkte umbenennen und für *Normalvektor(A,B) -> Richtungsvektor(P,Q)*, sowie *statt A -> Mittelpunkt(P,Q)* setzen. Nach Vereinfachen erhalten wir $6x+4y=2$.

Wenn wir noch kürzen wollen, so kopieren wir die Gleichung mit F4 in die Authorenzeile und dividieren durch 2. Wir prüfen das Ergebnis durch Zeichnung sowohl von der Gerade PQ, als auch der Streckensymmetrale.

Übung:[Lösung als Derive-File](#)

Berechne die Koordinaten des Höhenschnittpunkts des Dreiecks A,B,C mit A(5/0), B(6/-1) und C(6/3) und fertige eine Zeichnung an.

Beispiel:[Lösungs als Derive-File](#)

Das Deltoid ABCD hat die Eckpunkte D(1/-2) und A(9/ya). Die Länge der Symmetriediagonale AC beträgt $5\sqrt{5}$, der Diagonalschnittpunkt ist E(5/0). Berechne die Eckpunkte des Deltoids und den Inkreisradius.

In diesem Beispiel ist es notwendig den Einheitsvektor zu verwenden. Wir werden ihn auch als Formel in die "Sammlung" *vektoren.mth* aufnehmen, genauso wie die Abstandsformel Punkt-Gerade.

Wir öffnen also zunächst die Datei *vektoren.mth* und schreiben und [Schreiben/Funktion definieren](#):
 Einheitsvektor(a):= a/ABS(a),
 und
 Abstand_Ag(A,B,n0):=ABS((B-A)*n0)

Wir speichern die Datei und öffnen ein neues Deriveblatt, wo wir die Angabepunkte A:=[9,ya], D:=[1,-2] und E:=[5/0] eingeben. Danach zeichnen wir sie. Die nächsten Schritte werden wir der Übersichtlichkeit halber mit Überschriften versehen. Wir erzeugen eine Textfeld mit:

Berechnung von B:

B:= E+(E-D) und zeichnen den Punkt B ein und beschriften ihn. B:=[9,2]

Nächste Überschrift:

Streckensymmetrale von DB und A berechnen:

Wir laden die Datei *vektoren.mth* als Zusatzdatei über Datei/Laden/Zusatzdatei und öffnen den Menüpunkt [Schreiben/Funktion definieren](#). Wir schreiben n:= in die Authorenzeile, kopieren den Ausdruck `[ELEMENT(B - A, 2), - ELEMENT(B - A, 1)]` in die Authorenzeile und ersetzen B durch E und A durch D, also

n:= `[ELEMENT(E - D, 2), - ELEMENT(E - D, 1)]`. Vereinfachen ergibt n:=[2,-4].

Wir holen uns aus der Funktion Gerade_param(A,B) die Zeile `A + t·Richtungsvektor(A, B)` und ersetzen A durch E und Richtungsvektor(A,B) durch n, also `E + t·n`. Vereinfachen liefert: `[2·t + 5, - 4·t]`.

Dann setzen wir `2t + 5 = 9` (x-Koord. Von A), lösen nach t auf (t=2) und setzen t in `-4t` ein, dies liefert uns `-8` und A:=[9,-8] (Zeichnen und beschriften).

Wir brauchen eine neue Zwischenüberschrift, etwa

Einheitsvektor der Normalen und Auftragen von $5\sqrt{5}$ auf der Normalen von A aus.

Wir schreiben in die Authorenzeile n0:= und kopieren aus Einheitsvektor(a) die Zeile `a/ABS(a)`, ersetzen a durch n und es steht: `n0:=n/(ABS(n))`. Vereinfachen ergibt

$$n_0 := \left[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right]$$

Der Punkt C ergibt sich nun aus $C := A + 5\sqrt{5} \cdot n_0$ $C := [14, 18]$. Wir sehen wir haben auf die "falsche Seite" der Normalen von A aus aufgetragen, also $C := A - 5\sqrt{5} \cdot n_0$ und wir erhalten $C := [4, 2]$. Jetzt noch zeichnen $[A, B, C, D, A]$ und das Deltoid ist fertig.

Zum Schluss noch den Inkreismittelpunkt berechnen:

Wir schreiben als Überschrift:

Winkelsymmetrale durch D berechnen:

Wir definieren $d := A - D$ und $c := C - D$ und vereinfachen ($d := [8, -6]$, $c := [3, 4]$). Die Formeln für den Einheitsvektor werden wieder kopiert und die Variablen entsprechend ersetzt. Wir erhalten $d_0 := [4/5, -3/5]$ und $c_0 := [3/5, 4/5]$ und $w_0 := d_0 + c_0$ mit $w_0 := [7/5, 1/5]$. Die Winkelsymmetrale $w := D + u \cdot w_0$ (Der Parameter s ist nicht zu verwenden, da wir s schon als Streckensymmetrale belegt haben!). Schließlich ergibt $w := \left[\frac{7u}{5} + 1, \frac{u}{5} - 2 \right]$

Die nächste Überschrift heißt

Inkreismittelpunkt berechnen:

Wir setzen die Teile der Parameterdarstellungen von s und w gleich. Dazu öffnen wir Lösen/System und stellen die Anzahl der Gleichungen auf 2. Wir markieren bei s den Ausdruck $2 \cdot t + 5$ und setzen den Cursor in das 1. Feld des Gleichungssystems, drücken die F3-Taste und der Ausdruck ist im Feld.

Danach "=" eintippen und von der Winkelsymmetralen w den Ausdruck $\frac{7u}{5} + 1$ auf die gleiche Weise einfügen. Mit der 2. Gleichung verfahren wir genauso. Ein Klick ins Fenster Lösungsvariable zeigt die verwendeten Variablen an und "Lösen" ergibt für $t = 1/3$ und $u = 10/3$.

Durch Substituieren über **SUB** für z.B. $t = 1/3$ erhalten wir $17/3$ bzw. $4/3$, also $I := \left[\frac{17}{3}, \frac{-4}{3} \right]$. Wir zeichnen auch diesen Punkt ein.

Die letzte Überschrift:

Inkreisradius berechnen:

Wir brauchen dazu die Normale auf eine Deltoidseite und den Einheitsvektor davon. Da wir schon d_0 (Einheitsvektor von AD) kennen, brauchen wir nur noch die Normale auf d_0 berechnen, nämlich $nd_0 := [-3/5, -4/5]$. Jetzt schreiben wir in die Autorenzeile $r :=$ und kopieren aus der Abstandsformel den Teil $ABS((B-A)/n_0)$, ersetzen B durch I und n_0 durch nd_0 und erhalten $r := 10/3$.

Übungsbeispiele:

Berechne den Abstand des Punktes A von der Geraden g, spiegle A an g und gib die Koordinaten des Spiegelpunktes A_1 an. $A(6/2)$, $g: -x + 4y = 2$

Welchen Abstand haben die beiden parallelen Geraden g, h voneinander?
 $g: X = (3/-8) + t(0/1)$ $h: X = (5/5) + s(0/-1)$

Berechne Umkreismittelpunkt und Umkreisradius des Dreiecks $A(-1/3)$, $B(9/3)$, $C(11/19)$